

前 言

水电站动力渠道涌波、压力管道水击、引水道-调压室水位波动等现象,可以归结为水电站的非恒定流问题。非恒定流是水电站运行过程中经常出现的现象,也是一种非常复杂的水力现象。但是,非恒定流计算的结果又是水电站引水系统设计和校核的依据。因此,水电站非恒定流的计算是水电站设计的必要环节,也是一个难点。

但是,水力学、计算水力学等方面的著作不详细讲述水电站引水系统的水力特点及针对性的计算方法,而水电站方面的教材、著作又不详细介绍非恒定流的计算方法和程序设计。鉴于这种情况,本书希望从水力学及数学基础、程序设计基础和水电站非恒定流计算等方面,将相关内容综合到一起,实现水电站非恒定流的数值计算及其程序设计,达到工程应用的目的。

本书主要从理论基础、数值计算、程序设计三方面来阐述水电站非恒定流问题的求解。理论基础方面,本书从计算水力学的基本定理出发,介绍水流的连续方程和动量方程。然后,在不同章节分别导出根据水电站非恒定流的具体情况简化后得到更具体的连续方程和动量方程,并对数值计算方法、公式进行了详细的整理和综合,对有关文献中有重要价值但印刷有误的公式进行了整理、修正,或者重新表述、解析,以利于实际应用。数值计算方面,本书讲述了水电站非恒定流数值计算所需要的数学知识,以及有限差分法、特征线法等数值方法在水电站非恒定流计算中的具体应用。对动力渠道涌波、引水道-调压室水位波动、压力管道水击等问题,都给出了相应的数值计算方法和算例。程序设计方面,本书介绍了 Excel VBA 和 MATLAB/Simulink 的程序设计基础。鉴于 Excel 的广泛应用及强大功能,即使没有编程经验,只要简单学习 Excel VBA 编程基础,并经过对算例的学习,即可快速把握简单数值计算所需要的计算机基础。对于已经使用过 VBA 或者 VB 语言的工程人员,甚至不用看本书这部分内容,也不会影响到对其他内容的阅读。至于 MATLAB/Simulink,众所周知, MATLAB 是数值计算领域的重要软件, MATLAB/Simulink 毫无疑问是水电站非恒定流数值计算的有力工具,尤其是针对复杂的水电站引水系统。

本书的第 1 章、第 4 章的第 1~3 节、第 5 章的第 9~11 节、第 6 章、第 7 章、第 8 章的第 5~7 节由河北工程大学简新平完成,第 2 章、第 3 章、第 4 章的第 4~7 节、第 5 章的第 1~8 节、第 8 章的第 1~4 节由河北工程大学张红光完成。书中的程序代码、注释和仿真模型由简新平完成,测试工作由张红光完成。所有数学理论由河北工程大学水利水电学院董卫教授指导和审核。全书由简新平统稿。

本书是在河北省水资源高效利用工程技术研究中心运行绩效后补助经费(项目编号:18965307H)资助、河北工程大学水利水电学院支持下完成。在撰写过程中还得到了河北工

程大学水利水电学院张勇高级工程师的帮助和大力支持,以及相关专业老师的重要参考意见。在此,作者一并表示衷心的感谢!

限于作者水平,加之时间仓促,缺点在所难免,敬请广大读者批评指正。

作者
2018年3月

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 水电站的非恒定流问题	1
1.2 水电站非恒定流问题的研究方法	3
1.3 数值计算的方法	4
1.4 水电站非恒定流数值计算的特点	5
1.5 本书的主要内容	5
1.6 本章小结	6
第 2 章 水电站非恒定流问题的理论分析和数学基础	7
2.1 水电站非恒定流问题的理论分析方法	7
2.2 水电站非恒定流数值计算的数学基础	12
2.3 本章小结	24
第 3 章 水电站非恒定流数值计算程序设计技术	25
3.1 水电站非恒定流数值计算采用 Excel VBA 的理由	25
3.2 数值计算需要的 Excel VBA 语言基础	26
3.3 数值计算中 Excel VBA 输入和输出的技巧	38
3.4 水电站非恒定流数值计算的有效工具——Simulink	41
3.5 Simulink 数值建模	43
3.6 综合应用实例	64
3.7 本章小结	67
第 4 章 典型差分格式及程序设计	68
4.1 一维线性平流方程	68
4.2 显式差分格式	68
4.3 显式差分格式的程序设计与分析	71
4.4 隐式差分格式	87
4.5 隐式差分格式的解法	88
4.6 关于差分格式的讨论	92
4.7 本章小结	92
第 5 章 动力渠道涌波问题数值计算及程序设计	93
5.1 水电站的动力渠道及其水力计算	93
5.2 圣维南(Saint-Venant)方程	96
5.3 扩散差分格式	98
5.4 蛙跳格式	102

5.5	Lax-Wendroff 格式	104
5.6	半离散化格式	108
5.7	Abbott 隐式格式	112
5.8	Preissmann 隐格式	115
5.9	初始水面线的变步长加速迭代算法	122
5.10	动力渠道涌波的算例及程序设计	128
5.11	本章小结	136
第 6 章	水电站调洪演算的数值解法及程序设计	137
6.1	调洪演算的原理	137
6.2	调洪演算的数值解法算例及程序设计	137
6.3	本章小结	143
第 7 章	调压室水位波动数值计算及程序设计	144
7.1	调压室水位波动的基本方程	145
7.2	调压室水位波动的算例及程序设计	147
7.3	本章小结	158
第 8 章	压力管道水击的数值计算及程序设计	160
8.1	水击计算的基本方程式	161
8.2	特征线方程及特征方程组	161
8.3	特征方程组的求解	163
8.4	边界条件	165
8.5	水击计算的特征线法算例及程序设计	171
8.6	综合算例	189
8.7	本章小结	194
参考文献		195

第 1 章 绪 论

1.1 水电站的非恒定流问题

从集中水头、形成落差的方式不同来分类,水电站常分为坝式和引水式(徐招才和刘申,1994)。其中,坝式水电站通过修建大坝来抬高水头,形成落差,如图 1.1 所示。

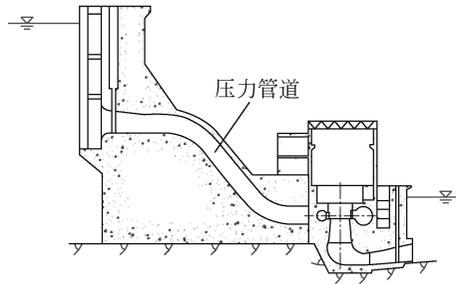


图 1.1 坝式水电站示意图

引水式水电站通过引水来集中水头,形成落差。根据引水建筑物中水流流态的不同,引水式水电站又可以分为无压引水式水电站和有压引水式水电站(徐国宾,2012),如图 1.2、图 1.3 所示。

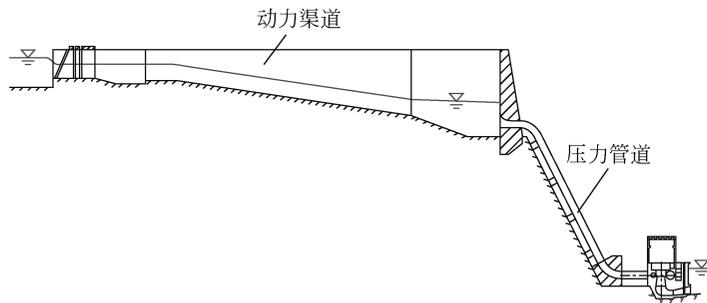


图 1.2 无压引水式水电站

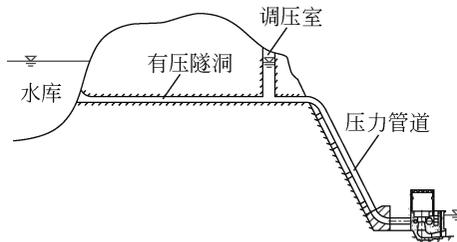


图 1.3 有压引水式水电站

当水电站的引用流量发生改变时,水电站的引水系统将产生非恒定流。例如,坝式水电站在水轮机改变流量时,压力管道将产生水击现象。图 1.4 就是在某水电站水轮机减少流量的过程中,压力管道产生水击,压力水头随时间变化过程。而引水式水电站在水轮机改变流量时,除压力管道产生水击现象外,无压引水式水电站的动力渠道还将产生涌波现象(王达邦,1983),有压引水式水电站的隧洞和调压井将产生引水道-调压室水位波动现象。图 1.5 是某引水式水电站加大流量过程中,动力渠道发生负涌波,沿程水深随时间变化过程。

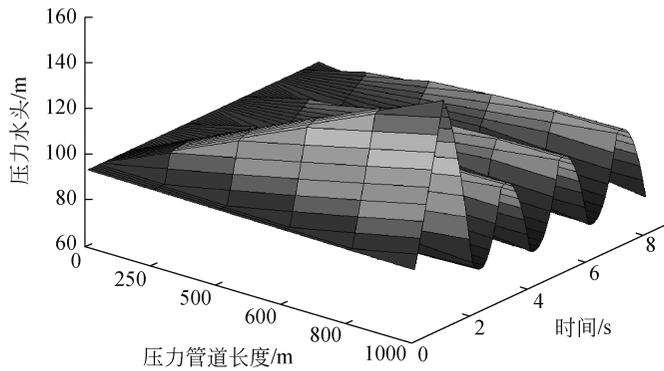


图 1.4 某水电站水轮机减少流量过程中压力管道水头随时间变化过程

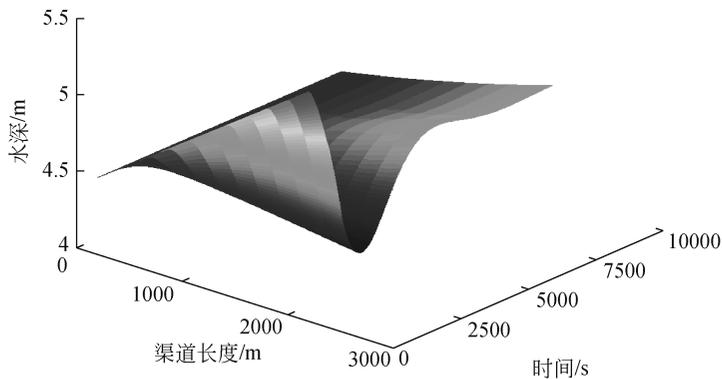


图 1.5 某引水式水电站加大流量过程中动力渠道水深随时间变化过程

压力管道的水击现象,动力渠道的涌波现象,引水道-调压室的水位波动现象,可以统称为水电站的非恒定流问题。

非恒定流是水电站运行过程中经常出现的现象,也是一种非常复杂的水力现象。但是,非恒定流计算的结果又是水电站引水系统设计和校核的依据。因此,研究水电站的非恒定流问题非常有必要。

1.2 水电站非恒定流问题的研究方法

现代水利水电工程技术的研究方法,一般有四类:理论分析、模型试验、数值计算、原型观测。

1.2.1 理论分析

理论分析从普遍的物理规律出发,通过严密的数学推导,得出具有普遍适用性的方程或公式,应用于工程计算和设计。因此,理论分析具有逻辑严密、计算准确等优点,而且理论分析的结论一般具有普遍适用性。另外,理论分析主要依赖研究人员的理论推导和计算,所以成本较低。

但是,客观世界往往是多维的、非线性的,水利水电工程也不例外。理论分析推导的结果,常常将水利水电工程中多维的、非线性的问题归结为偏微分方程组。而这些偏微分方程组,目前一般还不能得到其解析解。

水电站的非恒定流问题,在空间上虽然可以简化为一维问题,但是水力要素还与时间有关。因此,理论上,水电站非恒定流问题也常归结为与长度和时间有关的偏微分方程的求解问题。除了简单情况或者经过大量简化的条件下,水电站非恒定流问题一般没有解析解。

总之,理论分析虽然具有成本低、结论具有普遍适用性等优点,但是对于复杂实际问题还不能给出最终答案。尽管如此,理论分析给出的结论和方程,却是模型试验和数值计算等研究方法的基础。

1.2.2 模型试验

模型试验以量纲分析和相似律为基础,通过观测模型物理规律和数据,最终将试验成果和结论应用到实际工程中去(吴持恭,2008)。模型试验可以解决理论分析不能解决的问题,但是一般只能给出特定条件下定量的结果。模型试验依赖于特定的设备和试验条件,费用一般也比较高。

有些问题由于复杂性较高,模型试验也会存在困难。水电站非恒定流模型试验就比较困难。例如,水电站压力管道内发生水击时,水击波的传播速度往往在 1000m/s 左右,如果做模型试验,压力管道模型既要满足尺寸、糙率等相似条件,又要满足水击波速的相似条件,这导致很难找到合适的模型材料。再如,动力渠道的涌波问题,由于渠道内的水深和流速随着时间在不停变化,记录同一时刻渠道各断面的水深流速也是比较困难的。

随着技术的进步,试验设备越来越先进,已有研究者对水电站非恒定流进行了模型试验,试验成果对于理论和计算结果的验证,以及促进理论和数值计算方法的发展和进步起到了重要的作用。

1.2.3 数值计算

数值计算从偏微分方程出发,通过在时间和空间上离散问题的求解域,将复杂的、非线性偏微分方程离散为一系列的代数方程,最终通过求解代数方程得到偏微分方程的数值解(汪德燿,2011)。

数值计算是水电站非恒定流问题的有效求解方法。它克服了理论分析和模型试验的缺点,又充分利用了理论分析得到的数学模型和结论,还使用了模型试验得到的参数。在条件允许时,数值计算的一些结果还可以通过模型试验来验证。

从20世纪70~80年代至今,我国学者对水电站非恒定流数值计算进行了大量的研究,从算法到应用、验证等各方面取得了大量的研究成果。可以说,水电站非恒定流数值计算方法在理论和技术上已经逐渐跨入成熟、可靠的阶段。因此,水电站引水系统的相关设计规范也逐渐推荐采用数值计算的方式求解水电站非恒定流问题。

但是,由于问题和算法相对复杂,相关规范一般没有给出相关的数值计算方法。而有些水工设计手册虽然给出了水电站非恒定流数值计算的理论基础和计算公式,但很少给出专门的算例和具体程序设计方法。目前,专门针对水电站非恒定流数值计算,尤其是针对引水系统比较复杂的情况(如无压明渠与有压引水系统串联情况)的商业软件很少见。这些现状给水电站非恒定流数值计算的工程应用带来了困难。

本书主要针对上述情况,探讨水电站非恒定流数值计算的工程应用。除讲述水电站非恒定流数值计算的理论基础外,还介绍相关的数值计算基础知识,紧密结合实际工程,通过算例深入浅出地探讨计算思路、程序设计过程,力图使读者能把握水电站非恒定流数值计算的算法并能独立编写计算程序,解决实际工程中水电站非恒定流计算中的难题。

1.2.4 原型观测

原型观测是验证理论分析、模型试验、数值计算这些方法的最终手段,属于事后分析。已建工程的原型观测结果可以用来检验数值计算方法的正确性。对于一个正在设计、尚未建设的水电站而言,不能采用原型观测的方法研究自身的技术问题。

1.3 数值计算的方法

理论上,无论是固体力学还是流体力学的问题,常常归纳为偏微分方程组的求解。对于固体力学中的偏微分方程组,常用数值计算方法是有限差分法和有限元法。对于流体力学中的偏微分方程组,常用数值计算方法是有限差分法和有限体积法(汪德燿,2011)。

有限差分法从数学的角度,用差分来代替微分,把偏微分方程组及其边界条件近似地用代数方程组来表示,求解代数方程组,得到偏微分方程组的近似解。有限差分法是数值计算最早采用的方法,至今仍被广泛运用。并且,由于有限差分法是数学上的近似,它对于固体力学和流体力学问题都有很好的适用性。

有限元法将研究对象离散为大量的有限单元,在每一个单元内采用线性或非线性插值来近似,用有限单元的集合体来近似连续体,同样将偏微分方程组近似地变成代数方程组,最终求得问题的解。有限元法常用于固体力学问题、固体热传递问题及渗流问题等方面的求解。对于有大变形的流体力学问题,实践表明,有限元法还存在一些不足。

有限体积法是计算流体力学常用的一种数值算法。与有限差分法将微分方程离散为差分方程不同,有限体积法将积分形式的守恒方程离散为大量控制体上的守恒代数方程。简单地说,有限体积法将研究区域离散为大量的有限体积(一般称为控制体),对于每一个控制体要求满足质量、动量和能量守恒,建立代数形式的守恒方程组,最终求得问题的解。

除上述经典算法外,近年来,诸如光滑粒子流体动力学(SPH)、格子玻尔兹曼方法(LBM)等算法逐渐兴起,这类方法对于大变形或者不连续问题的求解具有较大优势,但是也还存在一些不足,有待进一步发展。

1.4 水电站非恒定流数值计算的特点

水电站非恒定流数值计算主要有以下特点。

(1)水电站非恒定流数值计算遵守计算水力学的一般规律。

水电站非恒定流数值计算是计算水力学的一种特殊情况,在理论上完全遵守计算水力学的两大守恒定理,即质量守恒定理和动量守恒定理。事实上,水电站非恒定流计算一般就是从质量守恒定理得到连续方程,从动量守恒定理得到动量方程。此外,在算法上,水电站非恒定流方程的离散和求解方法,也可以看成计算水力学算法简化和优化。

(2)水电站非恒定流与时间有密切关系,在较短时间内,水力要素有较大的变化。

水电站非恒定流数值计算就是要计算边界条件随时间变化时,引水系统的水力要素,如水流速度、流量、水头等,随时间变化的过程。

(3)水电站非恒定流问题在空间上可以简化为沿引水道长度方向的一维问题,但是尺度上比较大,属于一维较大尺度的问题。

水电站的引水道一般比较长,如图1.2所示,大型引水式水电站的引水渠道或隧洞可以达到几千米到几十千米,长度方向尺度较大。如果不进行简化,直接采用三维有限差分法或者三维有限体积法来计算,以目前的计算机硬件条件是不易实现的。而类似格子玻尔兹曼方法这类需要大量粒子来计算的方法,就更不适合水电站非恒定流的数值计算了。相对于长度,水电站引水道的断面尺寸就要小得多,因此,完全可以在断面上取水力要素的平均值(如平均速度、平均水头等),将水电站非恒定流问题在空间上简化为一维问题。

总之,水电站非恒定流问题遵守质量守恒定理和动量守恒定理,一般简化为水力要素在空间上一维变化,并随时间的变化的水力学问题。这种问题的求解,适合采用有限差分法。

1.5 本书的主要内容

本书主要从理论基础、数值计算、程序设计三方面来阐述水电站非恒定流问题的求解。理论基础方面,本书从计算水力学的基本定理出发,介绍计算水力学的连续方程和动量

方程。然后,在不同章节分别导出根据水电站非恒定流的具体情况简化后得到更具体的连续方程和动量方程。这样做的目的,是希望把水电站非恒定流在理论上的来龙去脉讲清楚,并为数值计算准备理论基础。

数值计算方面,本书讲述了水电站非恒定流数值计算所需要的数学知识,以及有限差分法、特征线法等数值方法在水电站非恒定流计算中的具体应用。对动力渠道涌波、引水道-调压室水位波动、压力管道水击等问题,都给出了相应的数值计算方法和算例。

程序设计方面,本书介绍了 Excel VBA 和 MATLAB/Simulink 的程序设计基础,这是完成水电站非恒定流数值计算的计算机基础。鉴于 Excel 的广泛应用及强大功能,即使没有编程经验,只要简单学习 Excel VBA 编程基础,并经过对算例的学习,即可快速把握简单数值计算所需要的计算机基础。对于已经使用过 VBA 或者 VB 语言的工程人员,甚至不用看本书这部分内容,也不会影响到对其他内容的阅读。至于 MATLAB/Simulink,众所周知,MATLAB 是数值计算领域的重要软件,而 Simulink 是不要需要写代码就可以实现仿真计算的工具箱。毫无疑问,MATLAB/Simulink 在水电站非恒定流数值计算中具有独特优势,尤其是针对复杂的水电站引水系统。如果不想写代码,则 Simulink 更是不错的选择。

以上三方面的内容,如图 1.6 所示,在书中并不是按简单的先后顺序排列的,而根据对理论基础、编程基础、数学基础、算法的描述和问题的解决等,按这样的自然顺序来逐步展开的。

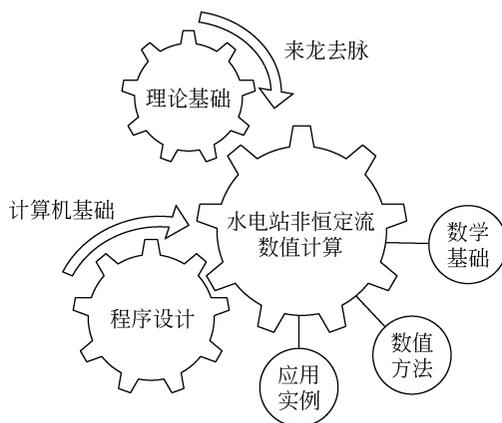


图 1.6 本书的主要内容

1.6 本章小结

本章首先提出了水电站引水系统可能产生的非恒定流问题,讨论了水电站非恒定流问题的研究方法。并指出,数值计算的方法在理论和技术上已经逐渐成熟,但在工程应用上还存在一些困难。

其次,通过讨论各种固体力学和流体力学中的数值计算方法,分析水电站非恒定流数值计算的特点,有限差分法被认为是适合水电站非恒定流计算的。

最后,介绍了本书的主要内容。

第 2 章 水电站非恒定流问题的理论分析和数学基础

2.1 水电站非恒定流问题的理论分析方法

2.1.1 研究流体运动的两种视角

研究流体运动可以有两种不同的视角,即欧拉角度和拉格朗日角度(吴持恭,2008)。水力学是流体力学的分支,因此,同样可以采用这两种视角来研究水力学的问题。

1. 欧拉角度

从欧拉角度研究流体的方法称为欧拉法。如图 2.1 所示,取空间控制体 M 作为研究对象。从欧拉角度看,这个控制体是空间固定的一个坐标范围,流体质点随时间在流入和流出这个控制体。以水流沿 x 方向流动为例,在某一瞬时 t_1 ,流体质点 a 在控制体内,它的水力要素影响控制体内的总水力要素,如质量、动量等。经过一定时间后,在时间 t_2 ,流体质点 a 流出控制体,而流体质点 b 流入了控制体,这时流体质点 b 所携带的质量、动量等水力要素就导致控制体 M 内的总水力要素发生变化。

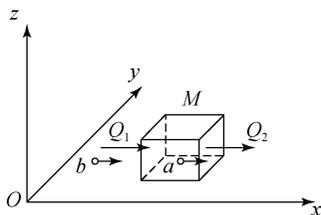


图 2.1 研究流体运动的欧拉角度

欧拉角度正是研究控制体或控制断面的水力要素,而不研究具体是哪一个水流质点导致控制体或控制断面的水力要素发生变化。也就是说,欧拉角度固定在控制体或控制断面上,不跟随研究某一固定的水流质点的运动。

当取控制体作为研究对象时,流体质点流入控制体,我们就研究控制体内这部分流体的水力要素,流体质点流出控制体后,我们就不再关心它。当取断面作为研究对象时,流体质点处在控制断面,我们研究的就是这部分流体质点的水力要素,当流体质点离开控制断面后,我们不再关心它。

总之,欧拉法把运动要素从物质点分离出来,观察空间位置的运动要素而不是观察固定的物质点的运动要素。

从欧拉角度研究流体的运动,实质是研究流场随时间的变化,因此,欧拉法可以利用高等数学中的微积分理论作为分析和计算工具,便于计算机编程计算。此外,欧拉角度也便于推导出守恒型微分方程,使数值计算中容易保证质量、动量等流通量的守恒。目前主要的计算流体力学算法,如有限差分法、有限体积法,都是采用欧拉角度。

但是,欧拉角度一般要求研究区域的流体是连续的,对于浪花、自由水面等不连续流体的运动,欧拉角度处理起来有困难。此外,由于欧拉角度不研究固定的流体质点,对于非恒定流,流体质点的运动轨迹不易通过欧拉角度都得到。

2. 拉格朗日角度

从拉格朗日角度研究流体的方法称为拉格朗日法,又称随体法。拉格朗日角跟随流体质点运动,研究固定质点的运动要素随时间变化的规律。如图 2.2 所示,拉格朗日法研究具体的流体质点(如图 2.2 中的流体质点 a)的受力、速度、运动轨迹等,追踪流体质点的运动轨迹,流体质点运动到哪,就跟随到哪。

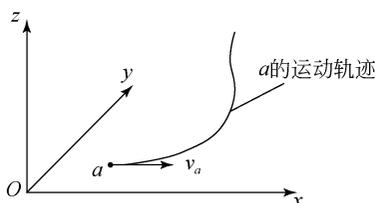


图 2.2 研究流体运动的拉格朗日角度

拉格朗日法研究单个流体质点的运动,集合所有质点的运动,就构成了整个流体的运动。

所以,拉格朗日角度其实是直接运用固体力学中质点动力学来研究流体的运动。拉格朗日角度的特点,使拉格朗日法在研究不连续流体、自由水面和流体质点的运动轨迹等方面具有优势。

拉格朗日法不易求得流体质点之间的相互作用力,也就不能得到流体质点的加速度(或者冲量)而进一步计算其运动过程,因此,在应用方面存在一定困难。随着数值计算的发展,拉格朗日法的缺点正在被逐渐克服,许多欧拉法不易解决的问题,已经可以用拉格朗日法得到满意的结果。

前面提及的光滑粒子流体动力学方法、格子玻尔兹曼方法等算法,都是基于拉格朗日角度,这些算法在特定问题中具有明显的优势,也正在发展之中。

2.1.2 欧拉法与拉格朗日法的关系

欧拉角度和拉格朗日角度对流体运动的研究,既有区别,又有联系。简单地说,欧拉法研究流场,拉格朗日法研究物质点,二者在理论公式上可以通过物质导数联系起来。下面通过物质导数的概念与讨论,帮助理解欧拉法与拉格朗日法的关系,并进一步理解欧拉法。

1. 一维空间下的物质导数

如图 2.3 所示,对于一维明渠,水流沿长度 s 方向运动。设 f 为断面上水流质点的速度或者水深等运动要素,在欧拉视角,可以用 s 表示断面位置,用 t 表示时间,则

$$f=f(s,t) \quad (2.1)$$

式(2.1)的含义是,运动要素 f 为空间位置 and 时间的函数。

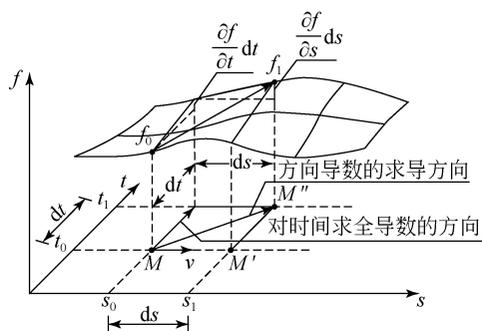


图 2.3 一维空间下的物质导数

如果固定位置 s 不变,这个断面的运动要素随时间 t 变化, $\frac{\partial f}{\partial t}$ 为在某一固定位置观察运动要素 f 随时间 t 的变化率,不跟随物质点走。例如, f 为断面流量时, $\frac{\partial f}{\partial t}$ 表示断面流量的时间变化率,实际上就是不同的水流质点流过某一断面时的速度乘以断面面积,不同的时刻观察的是不同物质点的速度。

如果观察同一时刻不同断面的运动要素,则运动要素断面随断面位置而变化。欧拉视角描述运动要素在空间的场,这个场随时间变化。当观察同一时刻不同断面的运动要素时,实际上是在观察不同物质点的运动要素构成的场,而不是观察某一固定物质点的运动要素, $\frac{\partial f}{\partial t}$ 实际上表达的是运动要素随位置改变(对应不同的物质点)的变化率。

欧拉视角描述的是运动要素的场,即流场。 s 可以表示观察的位置,可以固定不动。人来人往,我站立在旁边观察,我的视线不动,看到形形色色。 s 表示变化的观察位置也可以变化,在这观察一下,在那观察一下。特殊情况下, s 表示的位置和某个被观察者绑定在一起,始终只看一个人,我的眼里只有你,你走到哪,我的视线就跟到哪,这种特殊情况就是拉格朗日视角,研究物质点的运动。

欧拉法把运动要素从物质点分离出来,观察空间位置的运动要素而不是观察物质点的运动要素,体现运动要素的时间和空间分布。观察不同位置运动要素的差异,以及不同时间运动要素在空间分布的变化。

在欧拉场中,要观察某一物质点的运动要素,就要不断变化观察位置 s ,物质点走到哪,观察位置 s 就放到哪。所以观察位置 s 要绑定到物质点上,随时间发生变化,与速度有关, $\frac{ds}{dt}=v$ 。只有追踪物质点的位置 s ,才能保证每次观察的都是同一个物质点的运动要素;

只有按 $\frac{ds}{dt}=v$ 的方向,才能追踪到物质点的运动要素变化率。

经过时间 dt ,某水流质点从 M 位置运动到 M' 位置,位移为 $ds=vd t$ 。相应地, f 的值由 f_0 变成了 f_1 。因此,对于该水流质点, f 对时间的变化率可以表示为

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} \quad (2.2)$$

由于 $ds=vd t$,即 $\frac{ds}{dt}=v$,则

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial s} \quad (2.3)$$

注意,这里 $ds=vd t$,必须成立。如果 $ds \neq vd t$,则 $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt}$ 表示的就不是某个水流质点的运动要素 f 对时间的变化率,不具有物理意义。

2. 物质导数与全导数的关系

物质导数是一种特殊的全导数,它是为了追踪物质点的运动,要求空间变量随着时间变化。一般全导数不要求自变量之间保持类似关系。

3. 物质导数与方向导数的关系

物质导数是全导数。方向导数是偏导数,是沿特定方向求导,沿坐标轴的偏导数实际上是特殊的方向导数。

4. 三维空间下的物质导数

设 x, y, z 轴方向的单位向量分别为 i, j, k ,笛卡儿坐标系下,速度向量场可以表示为

$$V = ui + vj + wk \quad (2.4)$$

其中

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z, t) \\ v &= v(x, y, z, t) \\ w &= w(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

考察密度为

$$\rho = \rho(x, y, z, t) \quad (2.6)$$

质点运动时,密度随时间的变化率为

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (2.7)$$

从中可以得到物质导数的表达式为

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.8)$$

笛卡儿坐标系下,速度向量算子 ∇ 的定义为

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.9)$$

物质导数可以表达为向量形式,它对任意坐标系都成立,即